Intensivtraining

Extremwertaufgaben

zu 5 gebrochen rationalen Funktionen

mit ausführlichen Erklärungen
des mathematischen Hintergrundes

Datei 43040

Stand: 13. Januar 2014

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

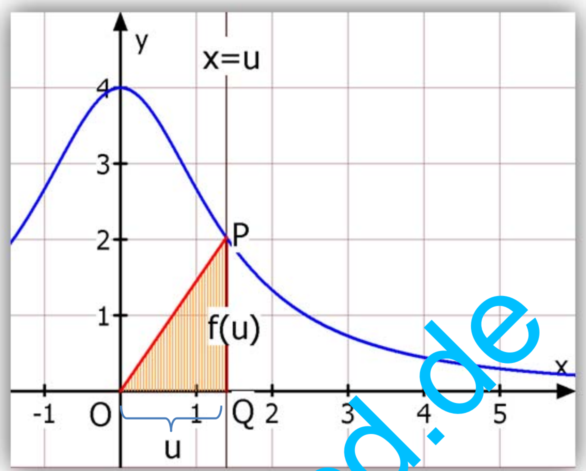
Vorwort

Hier biete ich Abiturienten ein Intensivtraining zum Thema Extremwerte an. An Hand von einigen gebrochen rationalen Funktionen werden extreme Flächeninhalte und Rauminhalte gesucht und berechnet.

Am Ende gibt es noch Hinweise auf den Einsatz zweier CAS-Rechner.
Der Text 49010 ist eine Sammlung von 121 Extremwertaufgaben zu allen Funktionstypen.
Dort findet man eine unglaubliche Fülle an Beispielen zum Üben.

Inhalt

Aufgabe 1



Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{8}{x^2+2}$.

Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ für $u > 0$ schneidet das Schaubild von f in P und die x-Achse in Q.

Für welchen Wert von u nimmt das Dreieck OPQ einen extremen Inhalt an.

LÖSUNG:

(1) ***Aufstellung der Zielfunktion.***

Die Eckpunkte haben diese Koordinaten: $P(u \mid f(u)) = \left(u \mid \frac{8}{u^2+2}\right)$, $Q(u \mid 0)$ und $O(0 \mid 0)$.

Der Inhalt eines Dreiecks wird durch die Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ berechnet.

Die Grundseite g ist die Strecke OQ und hat die Länge u.

Die Höhe h ist die Strecke QP, das ist gerade der Funktionswert f(u), bzw. $\frac{8}{u^2+2}$.

Weil die Abmessungen des Dreiecks die Variable u enthalten, wird der Dreiecksinhalt keine Zahl sondern eine Funktion, die Flächeninhaltsfunktion $A(u)$. Für sie gilt:

$A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$ bzw. $A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \frac{8}{u^2+2}$ bzw. $\boxed{A(u) = \frac{4u}{u^2+2}}$

(2) Zu jeder Funktion gehört ein ***Definitionsbereich***, der angibt, welche Werte verwendet werden: Hier gibt die Aufgabenstellung den entscheidenden Hinweis auf den Definitionsbereich: Dort steht, dass die Gerade $x = u$ für **$u > 0$** definiert ist. Zulässige u-Werte liegen also zwischen 0 und Unendlich. $\mathbf{D} = \left]0 ; \infty\right[$

Einschub: Warum wird 0 ausgeschlossen?

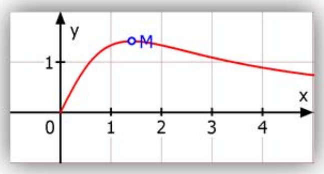
Nehmen wir an, $u = 0$ wäre zugelassen, dann hätten die Eckpunkte unseres Dreiecks diese Koordinaten: $P(0 \mid 0)$, $Q(0 \mid 0)$ und $O(0 \mid 0)$.

Das aber ist kein Dreieck mehr, sondern nur ein Punkt!

Einschub: Ich zeige jetzt das Schaubild der Flächeninhaltsfunktion im Voraus.

Dieses kennt natürlich der Schüler nicht, der die Aufgabe löst.

Ich möchte aber an Hand des Schaubilds zeigen, was uns erwartet.



Ist u noch klein, etwa $u = 0{,}5$, dann ist der Inhalt des Dreiecks $A(0{,}5) = \frac{8}{9} \approx 0{,}89$. Bis etwa $u = 1{,}4$ nehmen die A-Werte zu:

$A(1{,}4) \approx 1{,}41$, dann nehmen sie wieder ab: $A(4) = \frac{8}{9} \approx 0{,}89$

Und für $u \to \infty$ scheint der Inhalt gegen 0 zu gehen.

(3) ***Berechnung der Extremstelle*** der Flächeninhaltsfunktion: (Manuelle Berechnung)

$$\boxed{A(u) = 4\cdot\frac{u}{u^2+2}} \qquad A'(u) = 4\cdot\frac{1\cdot(u^2+2)-2u\cdot u}{(u^2+2)^2} = 4\cdot\frac{u^2+2-2u^2}{(u^2+2)^2} = \boxed{4\frac{2-u^2}{(u^2+2)^2}}$$

$$A''(u) = 4\frac{\overbrace{-2u}^{Z'}\cdot\overbrace{(u^2+2)^2}^{N} - \overbrace{2\cdot(u^2+2)\cdot 2u}^{N'}\cdot\overbrace{(2-u^2)}^{Z}}{(u^2+2)^4} = \boxed{4\frac{-2u(u^2+2)-4u(2-u^2)}{(u^2+2)^3}}$$

Einschub: Hier wurde die ***Quotientenregel*** zum Ableiten verwendet: $\boxed{\left(\frac{Z}{N}\right)' = \frac{Z'\cdot N - N'\cdot Z}{N^2}}$.

Das wird besonders schwer bei der zweiten Ableitung.

Dort ist $N = (u^2+2)^2$. Dies wird mit der Kettenregel abgeleitet: $N' = 2\cdot(u^2+2)\cdot 2u$.

Dann kann man die Klammer (u^2+2) im Zähler ausklammern und wegkürzen.

Für unseren Zweck muss man A“ nicht weiter zusammenfassen!

(4) **Notwendige Bedingung für Extremwerte:** $\boxed{A'(u) = 0}$

Einschub: $4\frac{2-u^2}{(u^2+2)^2}$ wird nur dann 0, wenn der Zähler 0 wird: $2-u^2 = 0$ d. h. $u^2 = 2$.

Jetzt wird es sehr wichtig:

Die Gleichung $u^2 = 2$ hat genau ***zwei algebraische Lösungen***: $u_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Man muss sie beide anschreiben.

Wegen des Definitionsbereichs $\mathbf{D} = \left]0;\infty\right[$ (jetzt wird er dringend benötigt)

ist allerdings nur die positive Lösung brauchbar. Es gibt also zwei algebraische aber nur 1 geometrische Lösung! Man schreibt das z. B. so auf:

$$u^2 - 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad u^2 = 2 \quad \text{mit} \quad u_1 = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad u_2 = -\sqrt{2} \notin \mathbf{D}$$

Nun muss man kontrollieren, ob A an dieser Stelle $\sqrt{2}$ auch tatsächlich einen maximalen Wert liefert. Man überprüft also die **hinreichende Bedingung:**

$$A''(\sqrt{2}) = 4\cancel{\frac{-2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}^2+2\right)-4\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}^2\right)}{\left(\sqrt{2}^2+2\right)^3}} = 4\frac{-2\sqrt{2}(2+2)-4\sqrt{2}(2-2)}{(2+2)^3} = 4\cdot\frac{-2\sqrt{2}\cdot 4}{4^3} < 0$$

Den durchgestrichenen Bruch schreibt man nicht auf, denn man ersetzt gleich $\sqrt{2}^2$ durch 2.

Entscheidend ist es, dass $A''(\sqrt{2}) < 0$ wird. Dies ist der Hinweis darauf, dass die Funktion A an der Stelle $u = \sqrt{2}$ eine Maximumstelle besitzt.

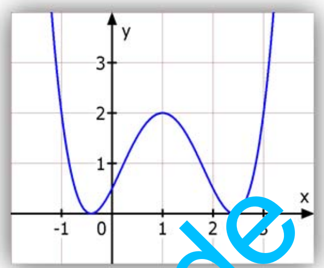
Der Maximalwert ist: $A(\sqrt{2}) = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2+2} = \sqrt{2}$

Das Schaubild von A besitzt also den Hochpunkt $H(\sqrt{2}\mid\sqrt{2})$. (Siehe Abbildung!)

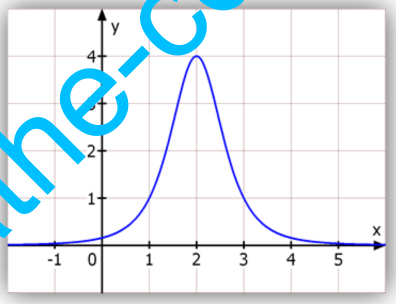
(5) **Zurück zur Flächeninhaltsaufgabe:**

Für die gestellte Aufgabe bedeutet dies, dass das Dreiecks OPQ für den Wert $u = \sqrt{2}$ einen maximalen Inhalt annimmt.

Einschub: Das Schaubild rechts hat an der Stelle 1 ein Maximum, die zugehörige Funktion hat also für x = 1 einen maximalen Wert.
Dies gilt aber nur mit Einschränkungen:
Im Bereich -0,8 < x < 2,8 liegt bei 1 wirklich der größte Wert. Aber wegen $f(4) = 24{,}5$ gibt es rechts „außen" und natürlich auch nach links größere Werte.
Aus diesem Grunde hat f bei 1 nur ein ***relatives Maximum***.



Diese Kurve dagegen hat bei x = 2 sogar ihr ***absolutes Maximum***, denn bei Annäherung gegen den Definitionsrand gehen die Funktionswerte gegen 0.



Diese Beispiele zeigen, dass also auf jeden Fall eine ***Randwertbetrachtung*** folgen muss.

Randwertbetrachtung zum Definitionsbereich D $= \left]0;\infty\right[$ **:**

$$\lim_{u\to 0} A(u) = \lim_{u\to 0} 4\cdot\frac{u}{u^2+2} = 4\cdot\frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{u\to\infty} A(u) = \lim_{u\to\infty} 4\cdot\frac{u}{u^2\left(1+\frac{2}{u^2}\right)} = \lim_{u\to\infty}\frac{4}{u\left(1+\frac{2}{u^2}\right)} = \lim_{u\to\infty}\frac{4}{u} = 0 \quad , \quad \text{denn auch } \lim_{u\to\infty}\frac{2}{u^2} = 0$$

Damit ist gezeigt, dass es bei Annäherung an die Ränder des Definitionsbereichs keine größeren Werte gibt als an der Maximumstelle.

(7) ***Ergebnis:***

Der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ nimmt für $u = \sqrt{2}$ ein ***absolutes Maximum*** an.